

Einleitung

Ausgehend von einem Scheibenelement für den ebenen Verzerrungszustand entsteht durch Hinzufügen einer Verzerrung in Umfangsrichtung ein Scheibenelement für Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung für linear-elastisches, isotropes Material.

Allgemeine Grundlagen

Betrachtet man bei einem rotationssymmetrischen Körper einen Ausschnitt mit dem Winkel $d\vartheta$, dem Ausgangsradius r_0 und der Ausgangslänge in Umfangsrichtung ds_0 und verschiebt diesen in Radialrichtung um die Strecke u so vergrößert sich der Radius auf r_1 und die Länge in Umfangsrichtung auf ds_1 . Für die Verzerrung in Umfangsrichtung ergibt sich dann:

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{ds_1 - ds_0}{ds_0} = \frac{d\vartheta \cdot (r_1 - r_0)}{d\vartheta \cdot r_0} = \frac{u}{r_0}$$

Der Verzerrungsvektor läßt sich unter Verwendung eines Differentialoperators $\mathbf{D}_{\varepsilon u}$ schreiben als:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

FEM für rotationssymmetrische Körper

Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen entsteht durch Einführung lokal begrenzter Ansatzfunktionen ein Verfahren der finiten Elemente. Das PVV ohne Berücksichtigung von Temperaturverzerrungen und Volumenkraften lautet:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{D}_{\varepsilon u} \delta \mathbf{u}_e(x, y))^T \mathbf{C} (\mathbf{D}_{\varepsilon u} \mathbf{u}_e(x, y)) d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T(x, y) \mathbf{p}(x, y) d\Gamma = \mathbf{0}$$

Diskretisierung über $numel$ Elemente liefert ein FE-Verfahren für rotationssymmetrische Körper unter rotationssymmetrischer Belastung. Das erste Integral bezeichnet die Elementsteifigkeitsmatrix, das zweite Integral den Elementrandlastvektor.

Die Integration erfolgt über den gesamten Umfang, damit wird aus dem Elementvolumen $\Omega_e = 2\pi A_e$ und aus dem Elementrand $\Gamma_e = 2\pi R_e$.

$$\sum_{e=1}^{numel} \delta \mathbf{u}_e^T 2\pi \int_{A_e} (\mathbf{D}_{\varepsilon u} \mathbf{N}_u)^T \mathbf{C} (\mathbf{D}_{\varepsilon u} \mathbf{N}_u) r dA_e \mathbf{u}_e - \delta \mathbf{u}_e^T 2\pi \int_{R_e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{p}(r, z) r dR_e = \mathbf{0}$$

Numerische Beispiele

Die Implementierung erfolgt für 4-, 8- und 9-Knoten-Elemente, hierbei zeigen sich die Vorteile gegenüber Schalenelementen (beispielsweise von ROTASS) beim Zylinder mit veränderlichem Querschnitt unter Wasserlast.

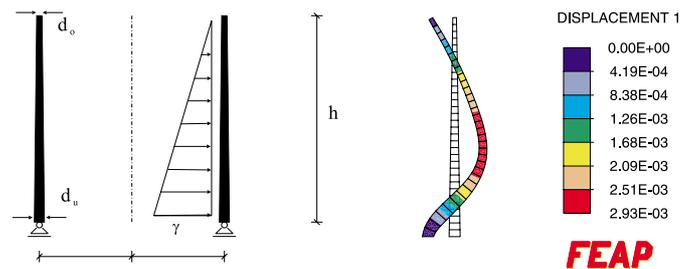


Abb.1 Zylinder mit veränderlichem Querschnitt

Um Aufschluß über die "Kosten" (ausgedrückt in Rechenzeit) der verschiedenen Elemente zu erlangen wird eine Vergleichsrechnung am Zylinder mit Randlast angestellt. Hier zeigt sich, daß das 8- und 9-Knoten-Element in der Genauigkeit der Formänderungsenergie über der Rechenzeit sich gegenüber dem 4-Knoten-Element als überlegen erweisen, sie konvergieren erheblich schneller.

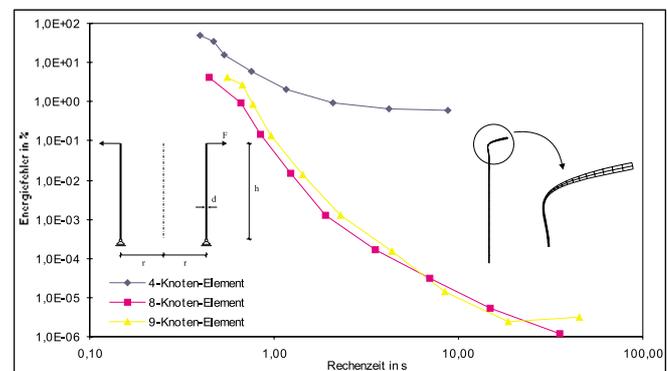


Abb.2 Formänderungsenergiefehler über der Rechenzeit