Numerische Untersuchung von stationären und instationären Wärmeleitungsproblemen

Universität Karlsruhe (TH)

BAUSTATIK

Vertieferarbeit von M.-Oliver Lippold

Einleitung

Temperaturdifferenzen in Kontinua bewirken Längenänderungen, also Verzerrungen, welche bei entsprechender Geometrie interne Spannungen hervorrufen können. Um die Größe der jeweilgen Spannungen an jedem Ort im Kontinuum abschätzen zu können bedarf es der Kenntnis über die vorherrschende Temperaturverteilung. Diese Temperaturverteilung ist neben den Materialeigenschaften und der Geometrie auch von den Randbedingungen abhängig. Letztere können sich mit der Zeit ändern und beeinflussen dadurch das Temperaturfeld.

Durch die Umsetzung der zugrunde liegenden Differentialgleichung der Wärmeleitung auf numerische Verfahren kann die Temperaturverteilung näherungsweise berechnet werden. Unter Verwendung eines Zeitintegrationsverfahrens können zudem veränderliche Randbedingungen erfaßt und damit die Änderungen der Temperaturverteilung im Kontinuum über die Zeit berechnet werden.

Allgemeine Grundlagen

Als Ausgangsgleichung dient das Fouriersche Gesetz :

$$Q = \lambda A \frac{\theta_1 - \theta_2}{\delta} t$$

Eine weitere wichtige Größe ist der Wärmefluß $q = \lambda \frac{\theta_1 - \theta_2}{\delta}$ der die in der Zeit t durch die Fläche A strömende Wärme Q beschreibt. Nach einsetzen in die Ebene Kontinuitätsbedingung und Umformen ergibt sich die quasiharmonische Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - Q = 0,$$

die neben der Wärmeleitung auch andere physikalische Probleme beschreibt. Für den instationären Fall lautet die Diffentialgleichung, nun in Abhängigkeit von der Zeit bei einem homogenen und isotropen Material.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \varrho}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right).$$

Die Randbedingungen

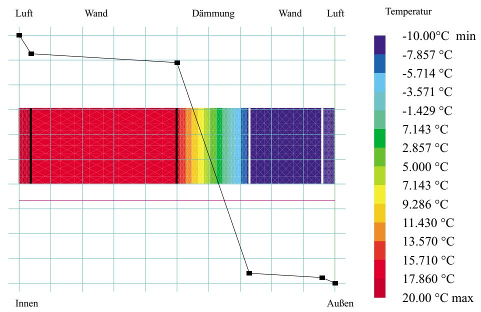
Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten von Randbedingungen :

- Dirichlet
- Neumann
- Robin bzw. Cauchy.

Bei der Dirichlet Randbedingung ist die Temperatur am Rand und bei der Neumann Randbedingung der Wärmefluß senkrecht zur Oberfläche vorgegeben. Die Robin Randbedingung wird nur beim Übergang zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten benötigt.

Numerische Beispiele

Darstellung des stationären Temperaturverlaufs einer kerngedämmten Wand :



Instationärer Verlauf der obigen Wand mit der Anfangstemperatur 20°C und einem plötzlichen Temperatursturz auf -10°C an der Aussenseite: