Spannungsermittlung in beliebigen dünnwandigen Querschnitten

Universität Karlsruhe (TH)

Diplomarbeit von Martina Luburić

BAUSTATIK

Einführung

Für dünnwandige prismatische Querschnitte sollen alle erforderlichen Spannungen und Querschnittswerte bei Vorgabe der entsprechenden Schnittgrößen ermittelt werden. Die numerische Umsetzung soll anhand der Torsion verdeutlicht werden.

St.Venat'sche Torsion prismatischer Stäbe

Der betrachtete prismatische Stab wird einem Torsionsmoment M_T mit konstanter Verdrillung ϑ' unterworfen. Für die Gleitungen infolge Torsion ergeben sich:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \vartheta' \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z\right)$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \vartheta' \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y\right)$$

Die Torsionsschubspannungen sind durch die Ableitungen der Wölbfunktion $\omega(y,z)$ sowie den Schubmodul G gegeben:

$$\tau_{xy} = \tau(s)\, cos\,\alpha = G\,\vartheta'\,(\omega,_y - z)$$
$$\tau_{xz} = \tau(s)\, sin\,\alpha = G\,\vartheta'\,(\omega,_z + y)$$

Der Querschnitt wird mit Zweiknotenelementen diskretisiert. Jeder Knoten besitzt einen Freiheitsgrad, der die Verschiebung in Stablängsrichtung (Verwölbung) beschreibt.

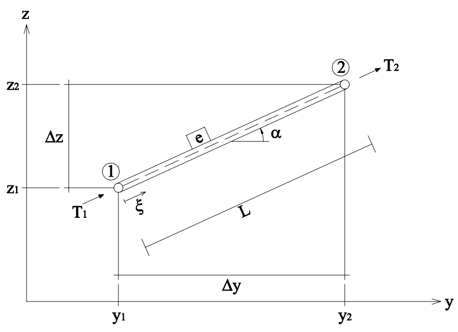

Abb. 1: Zweiknotenelement

Davon ausgehend wird eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in ξ-Koordinaten formuliert, die mit Hilfe des Weggrößenverfahrens exakt gelöst werden kann. Die sogenannte Grundverwölbung ω ist die Lösung des RW-Problems. Hieraus können die Einheitsverwölbung $\bar{\omega}$, die Hauptverwölbung $\tilde{\omega}$, die Koordinaten des Schubmittelpunktes y_M, z_M, das Torsionsträgheitsmoment I_T sowie der Wölbwiderstand I_ω bestimmt werden.

Die Darstellung der Differentialgleichung in Matrixschreibweise ergibt:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \vartheta' \left\{ \frac{G\,t}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} - G\,h \begin{bmatrix} -r_n \\ r_n \end{bmatrix} \right\}$$
$$\mathbf{T}_e = \mathbf{k}_e\,\mathbf{v}_e - \mathbf{f}_e$$

Für offene oder geschlossene Querschnitte gilt:

$$\tau(s) = \frac{M_T}{I_{To}}\,t \qquad \tau(s) = \frac{M_T}{I_{Tg}}\,(\omega,_s - r_n)$$

Für gemischte Querschnitte gilt:

$$\tau(s) = M_T \frac{I_{To}}{I_{Tges}^2}\,t \qquad \tau(s) = M_T \frac{I_{Tg}}{I_{Tges}^2}\,(\omega,_s - r_n)$$

Beispiel 1

Anhand eines offenen symmetrischen Querschnittes ist die Ermittlung der Einheitsverwölbung als auch der Hauptverwölbung grafisch dargestellt:

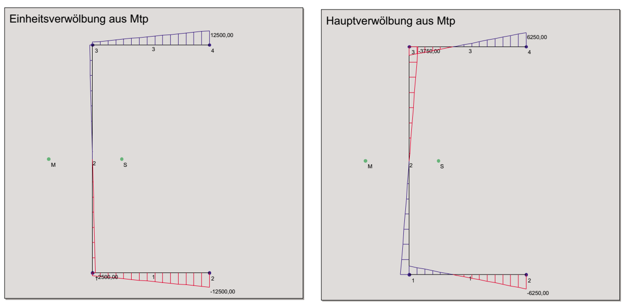

Abb. 2: Einheits- und Hauptverwölbung

Beispiel 2

Es wird ein unsymmetrischer, gemischt offen-geschlossener, einzelliger Querschnitt untersucht, der durch ein Torsionsmoment M_T belastet wird:

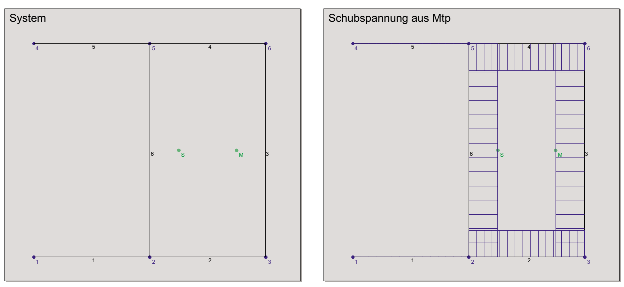

Abb. 3: System und Schubspannungsverlauf