



Netzfrie Methoden

In den vergangenen zehn Jahren sind neben der Finiten Elemente Methode auch verstärkt die sog. netzfreien Methoden in den Vordergrund gerückt. Im Gegensatz zur FEM wird hierbei keine Element-Knoten-Verknüpfungsliste benötigt, sondern nur eine lose Verteilung von Partikeln im Systemraum Ω .

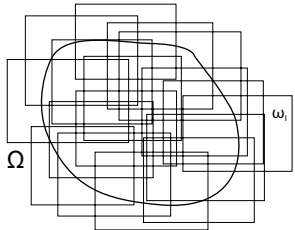
Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)

Die netzfreien Methoden (Meshless Methods) sind der Überbegriff für eine Reihe von Methoden, die die Netzfreiheit als gemeinsames Merkmal haben. In dieser Arbeit wurde die *Reproducing Kernel Particle Method* von Wing Kam Liu *et al.* näher betrachtet und in einem Programm implementiert.

Für die numerische Berechnung eines gegebenen Problems, z.B. eines Randwertproblems

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= f(x), & x \in \Omega \\ u(x) &= g(x), & x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

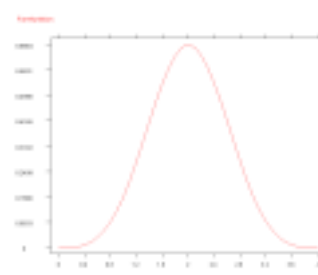
ist es einerseits notwendig den geometrischen Raum $\Omega \in \mathbb{R}^3$ als auch die analytische Gleichung, die das Problem charakterisiert, zu diskretisieren.



Die Geometrie wird durch eine geeignete Partikelverteilung diskretisiert. Jedem Partikel Partikel I ist ein kubusförmiger Einflußbereich ω_I zugeordnet, so daß der gesamte Systemraum komplett ausgefüllt wird. Mit Hilfe eines variierbaren Einflußradius ϱ für jede Koordinatenrichtung sind die Einflußkuben definiert zu

$$\omega_I := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{aligned} &|x_1 - x_{1I}| \leq \varrho_{x_1} \wedge \\ &|x_2 - x_{2I}| \leq \varrho_{x_2} \wedge \\ &|x_3 - x_{3I}| \leq \varrho_{x_3} \end{aligned} \right\}.$$

In Bereichen, wo benachbarte Einflußkuben einen gemeinsamen Schnittraum haben, kommt es zu einer Interaktion zwischen den entsprechenden Partikeln. Generell muß die Überdeckung dergestalt sein, daß immer mehrere Partikel zugleich auf einen bestimmten Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ Einfluß haben. Der Einfluß eines Partikels wird einerseits durch den ihm zugeordneten Einflußkubus begrenzt und andererseits durch eine ihm eigene Wich-



tungsfunktion $\mathcal{K}_\varrho$ bestimmt. So nimmt $\mathcal{K}_\varrho$ nur innerhalb ihres Einflußkubus ω Werte verschieden von Null an. Mit den Wichtungsfunktionen $\mathcal{K}_\varrho$ aller Partikel

kann nun die Lösungsfunktion $u(\mathbf{x})$ interpoliert werden.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I \mathcal{K}_\varrho(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) u(\mathbf{x}_I) \Delta V_I \quad (2)$$

Mit der Ansatzfunktion (2) geht dann auch die analytische Form der zu lösenden Gleichung (1) in eine diskrete über. Dabei sind ΔV_I Partikelgewichte, die den anteiligen Systemvolumina der jeweiligen Partikel I entsprechen.

RKPM-Wichtungsfunktionen

Da die Ansatzfunktion $u^h(\mathbf{x})$ mittels eines vollständigen trilinearen Basispolynoms $\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{x}_I - \mathbf{x}}{\varrho}\right)$ erstellt wurde, soll auch gewährleistet sein, daß (2) dieses Polynom vollständig „reproduzieren“ kann. Daher wird die ursprüngliche Wichtungsfunktion Φ_ϱ - ein kubischer Spline

$$\Phi_\varrho(x_I - x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3, & r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3, & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

mit $r = (x_I - x) / \varrho$

$$\phi_\varrho(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) = \frac{1}{\varrho^3} \Phi_{\varrho x_1} \Phi_{\varrho x_2} \Phi_{\varrho x_3}$$

- mit einer Korrekturfunktion $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}(\varrho, \mathbf{x}_I - \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{0}) \mathbf{M}^{-1}(\varrho, \mathbf{x}) \mathbf{P}^T\left(\frac{\mathbf{x}_I - \mathbf{x}}{\varrho}\right)$$

$$\text{mit } \mathbf{P}^T(\mathbf{0}) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$\mathbf{M}(\varrho, \mathbf{x}) = \sum_I \mathbf{P}^T\left(\frac{\mathbf{x}_I - \mathbf{x}}{\varrho}\right) \Phi_\varrho(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}) \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{x}_I - \mathbf{x}}{\varrho}\right) \Delta V_I$$

multipliziert. Das Produkt $\mathcal{K}_\varrho = \mathcal{C}\Phi_\varrho$ ist der sog. *reproducing kernel* - die RKPM-Wichtungsfunktion.