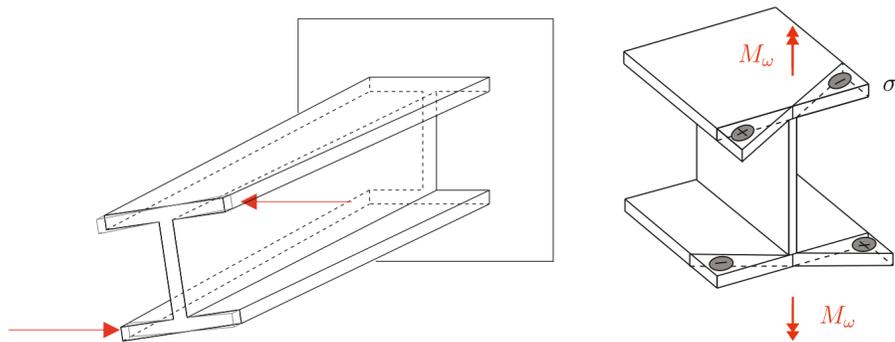


# Theorie und FE-Modellierung eines Timoshenko-Balkens zur Berücksichtigung von Wölbkrafttorsion

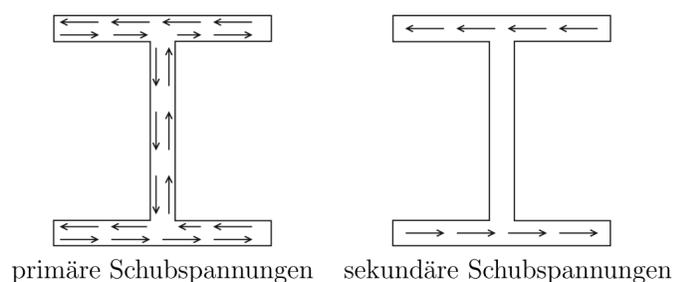
Eva Antoine

## 1. Motivation



Üblicherweise wird bei der Lastermittlung vereinfacht von ebenen, sich nicht verwölbenden Querschnitten ausgegangen. Die Annahme ist jedoch nur bei wölbfreien Querschnitten oder nicht-wölbfreien Querschnitten ohne Wölbbehinderung korrekt. Tatsächlich entstehen an Einspannungen äußere Wölbbehinderungen und durch über die Länge des Trägers angreifende Lasten innere Wölbbehinderungen. Daraufhin entsteht eine zusätzliche Spannung. Diese wird an einem 3D-Timoshenkovalken mit einem siebten Freiheitsgrad, der sogenannten Verwindung  $\psi$  und der dazugehörigen Kraftgröße, dem Wölbmoment  $M_\omega$  berücksichtigt.

## 2. Kinematische Grundlage



Bei der Betrachtung dünnwandiger Profile kann die Wagner Hypothese angewendet werden. Diese besagt, dass die durch die sekundären Schubspannungen hervorgerufen Schubgleitungen vernachlässigt werden können. Ihr Beitrag zur Berechnung des Torsionsmomentes wird nicht vernachlässigt. Die sekundäre Schubspannung wird folgendermaßen berechnet:

$$\gamma_{x\omega} = \psi + \vartheta_x$$

Mit Anwendung der Wagner Hypothese und unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion entsteht folgende Beziehung für die Verzerrung entlang der Stablängsachse:

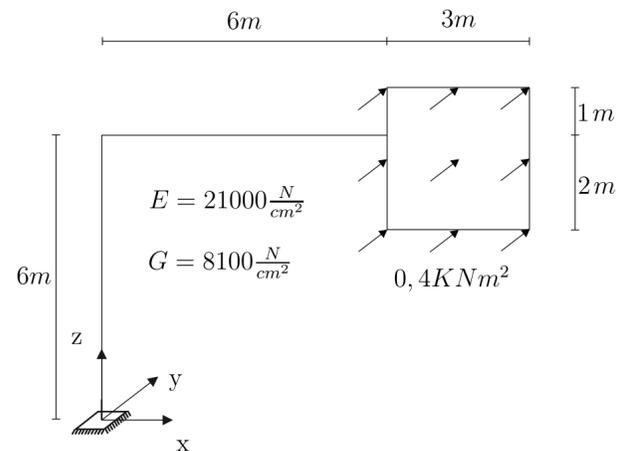
$$\varepsilon_x = \underbrace{u_x}_{\text{Dehnung}} + \underbrace{z \cdot \vartheta'_y - y \cdot \vartheta'_z}_{\text{Biegung}} + \underbrace{\omega(y,z)\psi'}_{\text{Verwölbung}}$$

## 3. Finite Elemente Methode

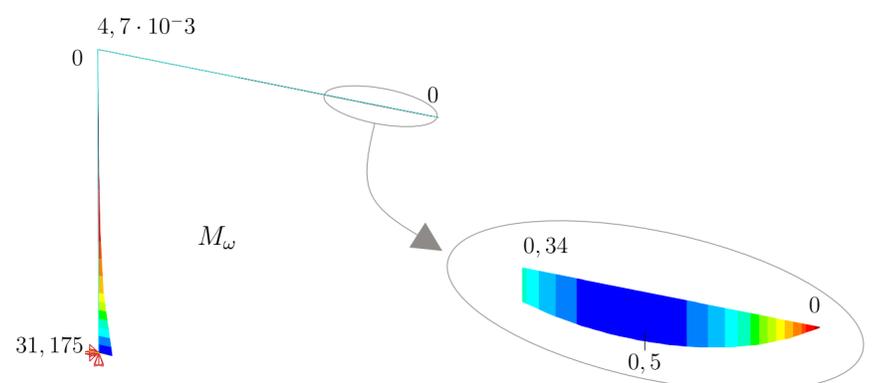
Im Rahmen der Finiten Elemente Methode werden für die drei Verschiebungen  $u, v, w$  und die drei Verdrehungen  $\vartheta, \varphi_y, \varphi_z$  lineare Ansätze gewählt. Mit Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion wird der Ansatz für die Verdrehung  $\vartheta$  neu gewählt und für die Verdrillung  $\psi$  ergänzt. Es können näherungsweise kubische Ansätze gewählt werden oder exakte Hyperbolische Ansätze. Die gesamte diskretisierte innere Arbeit beträgt:

$$W_i^e = \delta v_u^{eT} K_u^e v_u^e + \delta v_v^{eT} [K_v^e + K_{\varphi_y}^e] v_v^e + \delta v_w^{eT} [K_w^e + K_{\varphi_z}^e] v_w^e + \delta v_\vartheta^{eT} [K_\vartheta^e + K_\psi^e] v_\vartheta^e$$

## 4. Numerisches Beispiel



Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein 3D-Timoshenkovalken in das FE-Programm FEAP implementiert und um den siebten Freiheitsgrad zur Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion erweitert. Das implementierte Balkenelement wurde verifiziert und beispielhaft zur statischen Berechnung einer Schilderbrücke angewendet.



Das Wölbmoment wird am Knotenpunkt gelenkig übertragen. Der Wölbmomentenverlauf ist entlang der einwirkenden Streckenlast parabelförmig