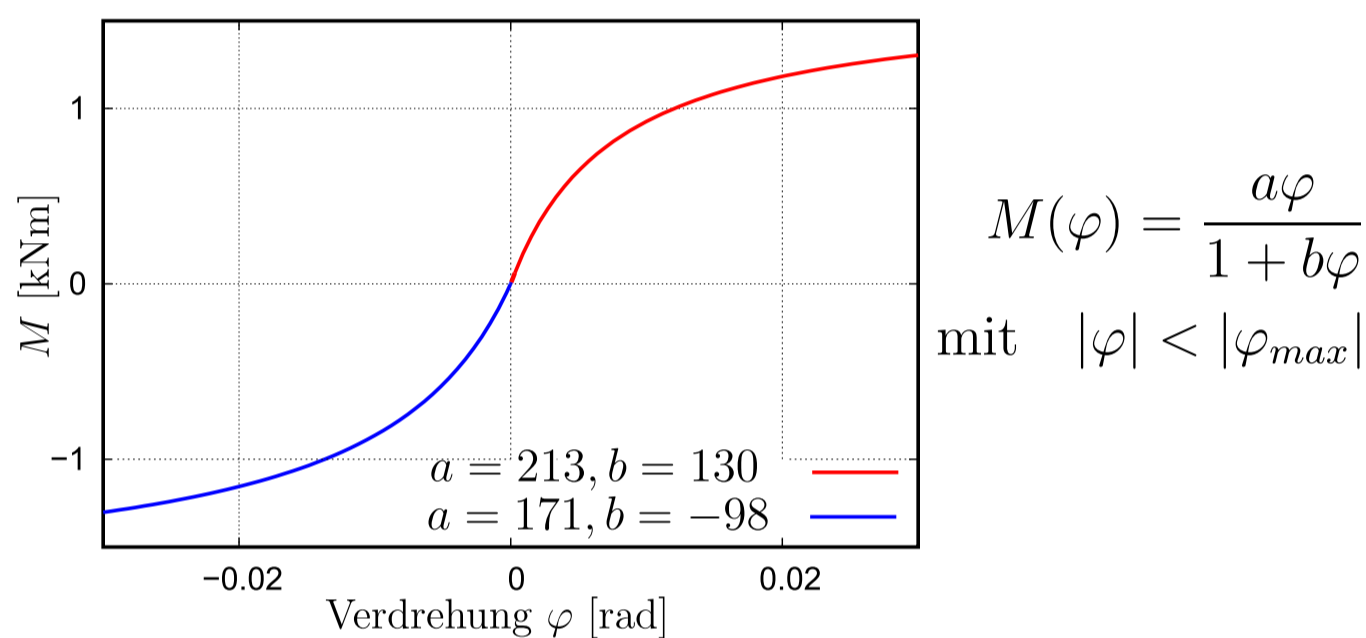


# Entwicklung eines FE-Stabelements mit integrierten nichtlinear elastischen Federn

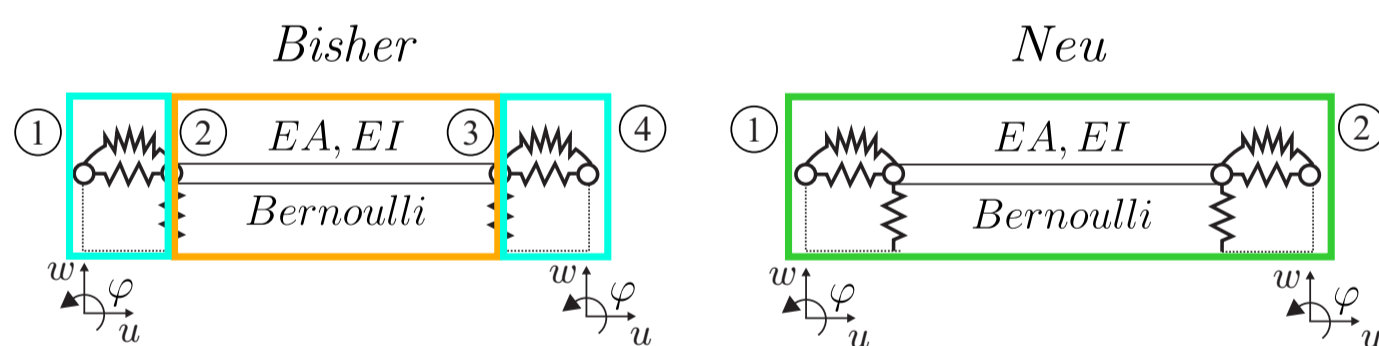
Leonhard Noll

## 1. Motivation und Ziele

Zur Berücksichtigung materieller Nichtlinearitäten in Bauteilanschlüssen werden nichtlineare Federn für eine realitätsgetreue Modellierung verwendet. Beispielsweise wird in den bauaufsichtlichen Zulassungen von Gerüstsystemen die nichtlinear elastische Kraft-Verschiebungsbeziehung der Anschlüsse in der folgenden Form angegeben (analog für  $Q$  und  $N$ ):



Für die Modellierung des Gerüstriegels mit angeschlossenen Federn werden folgende Varianten betrachtet:



Im neuen Ansatz werden die Federn in das Stabelement integriert. Statt 4 Knoten wie bei der herkömmlichen Variante, sind damit nur noch 2 äußere Knoten zu definieren. Die resultierende vereinfachte Eingabe verkürzt die Eingabezeit im Vergleich zur herkömmlichen Variante.

## 2. Integration der Federn

Die Federn werden mithilfe der statischen Kondensation in das Stabelement integriert, indem die inneren Knoten  $i$  herauskondensiert werden, sodass das neue Element über die äußeren Knoten  $a$  beschrieben wird.

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^e & K_{ai}^e \\ K_{ia}^e & K_{ii}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta v_a^e \\ \Delta v_i^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F^e \\ P^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^e \\ S^e \end{bmatrix} \quad \text{mit } S^e = 0$$

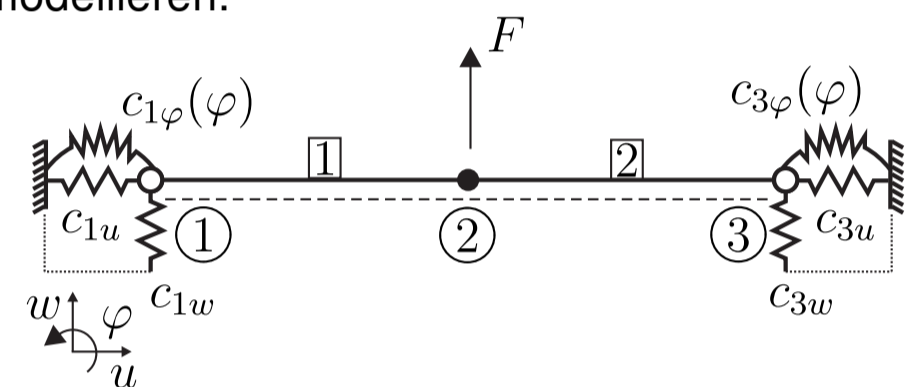
$$\Rightarrow \Delta v_i^e = K_{ii}^{e-1} (-K_{ia}^e \Delta v_a^e + P^e)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left( K_{aa}^e - K_{ai}^e K_{ii}^{e-1} K_{ia}^e \right)}_{\tilde{K}_{aa}^e} \Delta v_a^e - \underbrace{\left[ F^e - K_{ai}^e K_{ii}^{e-1} P^e \right]}_{\tilde{P}_a^e} = R^e$$

Die nichtlineare FE-Gleichung wird unter Berücksichtigung des Materialgesetzes mit dem *Newton-Raphson-Verfahren* gelöst.

## 3. Numerisches Beispiel

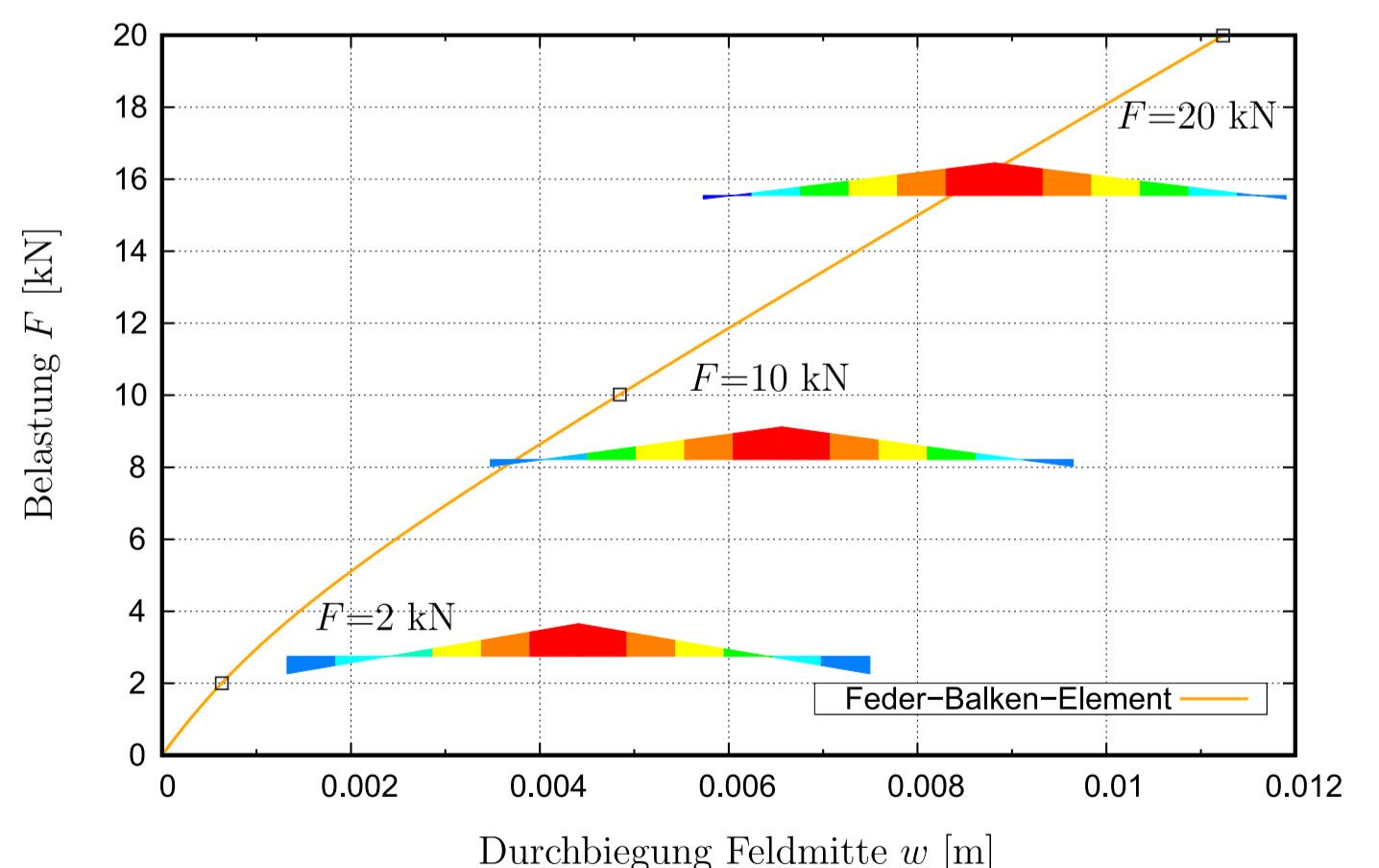
Das nichtlinear elastische Feder-Balken-Element wurde in *FEAP* implementiert, um nachgiebige Verbindungen am Beispiel des Gerüstbaus zu modellieren.



$E$	$2,1 \cdot 10^8$	kN/m <sup>2</sup>
$A$	$3,34 \cdot 10^{-4}$	m <sup>2</sup>
$I$	$1 \cdot 10^{-2}$	m <sup>4</sup>
$c_{1u}, c_{2u}$	$10^9 \cdot \frac{EA}{l}$	kN/m
$c_{1w}, c_{2w}$	$10^9 \cdot \frac{EI}{l^3}$	kN/m
$c_{2\varphi}, c_{3\varphi}$	$M'(\varphi)$	kNm/rad
$a$	213	kNm/rad
$b$	130	1/rad
$a, b$ symmetrisch um Ursprung		

Die Auswirkung von nachgiebigen Einspannungen kann im Beispiel des beidseitig nachgiebig eingespannten Balkens beobachtet werden. Für die Drehfedern werden die Federkennlinien aus der bauaufsichtlichen Zulassung entnommen. In der unteren Abbildung ist der Momentenverlauf qualitativ für drei Laststufen dargestellt.

Mit zunehmender Last  $F$  nimmt die Steifigkeit der Drehfeder an den Einspannungen ab, sodass sich das Moment ins Feld verlagert bis die Lagerung sich annähernd gelenkig verhält.



Im Rahmen dieser Arbeit wird ein FE-Stabelement mit integrierten nichtlinear elastischen Federn entwickelt und anhand von Modellrechnungen mit gerüstbautypischen Federkennlinien verifiziert, sodass das Element für die Berechnung von komplexen Gerüstsystemen eingesetzt werden kann.